

复旦大学技术科学大类《线性代数》

2023-2024 学年第一学期期中考试试卷

姓 名:

学 号:

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果, 并将严守纪律, 不作弊, 不抄袭, 独立答题。

学生 (签名):

2023 年 11 月 14 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分	10	6	12	12	4	6	13	9	72

一. (本题 10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

而 $m \times n$ 矩阵 X 满足 $AX = B$.

(1) m 和 n 分别是多少?

(2) 求 X .

1) $A_{3 \times 3} X = B_{3 \times 2}$

$\therefore X_{3 \times 2}$

则 $m = 3$

$n = 2$

2) 增广矩阵: $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow$

进行初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -15 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 \end{array} \right]$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} -15 & 19 \\ 19 & -26 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

二. (本题 12 分) 讨论 a, b 为何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 + ax_3 + bx_4 = b \\ x_1 - 3x_2 + (3-a)x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

有解或无解. 若有解, 求出其一般解.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 1 & -3 & 3-a & 2 & -3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \cancel{a} & b+1 & b-2 \\ 0 & 0 & -1-a & 0 & 0 \end{array} \right]$$

1° $a = -1$

I. $b = -1$. 无解 ($r(\vec{A}, \vec{b}) > r(\vec{A})$)

II. $b \neq -1$.

$$\begin{cases} x_1 = 3 - t_3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_2 = 2 + t_3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = \frac{b-2}{b+1} \end{cases}$$

2° $a \neq -1$. $x_3 = 0$

I. $b = -1$. 无解.

II. $b \neq -1$.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_2 = 2 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{b-2}{b+1} \end{cases}$$

综上, $b = -1$ 无解

$b \neq -1$. $a = -1$. 解为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - t_3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_2 = 2 + t_3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = \frac{b-2}{b+1} \end{cases}$$

$a \neq -1$. 唯一解

$$\begin{cases} x_1 = 3 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_2 = 2 + \frac{b-2}{b+1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{b-2}{b+1} \end{cases}$$

(12)

三. (本题 12 分) 考虑向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -13 \\ 20 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

说明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大线性无关组, 并将 α_4 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

$$\text{令 } A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$$

初等行变换

$$A: \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & -13 & 6 \\ 2 & 7 & 20 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 13 & -6 \\ 0 & 17 & -6 & 13 \\ 0 & 16 & -32 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 13 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3$, 主元列为 d_1, d_2, d_3 所在列, $\therefore d_1, d_2, d_3$ 是一个极大线性无关组.

$$\alpha_4 = -\frac{4}{7}\alpha_1 + \frac{5}{7}\alpha_2 - \frac{1}{7}\alpha_3$$

(12)

四. (本题 14 分, 前两小题每题 5 分, 第三小题 4 分) 设 x, y 分别是 n 维列向量, I_n 表示 n 阶单位矩阵.

(1) 证明当 $y^T x \neq -1$ 时, 矩阵 $I_n + xy^T$ 是可逆的, 并且它的逆矩阵形如 $I_n + cxy^T$, 其中 c 是一个常数.

(2) 利用 (1) 中的结果, 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 65 & 128 \\ 32 & 64 & 128 & 257 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

(3) 如果 $y^T x = -1$, 那么矩阵 $I_n + xy^T$ 是否依然可逆?

1) 当 $y^T x \neq -1$

$$\text{考虑 } (I_n + xy^T)(I_n + cxy^T)$$

$$= I_n + (c+1)xy^T + cxy^Txy^T$$

而 $y^T x$ 为一个数.

$$\therefore \text{原式} = I_n + (c+1+cy^T x)xy^T$$

$$\text{令 } c+1+cy^T x = 0 \therefore c = \frac{-1}{1+y^T x} \therefore \text{存在 } c \text{ 使 } (I_n + xy^T)(I_n + cxy^T) = I_n$$

$\therefore I_n + xy^T$ 可逆.

$$(2) A = I_4 + \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 16 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \\ 32 & 64 & 128 & 256 \end{bmatrix} = I_4 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } x = y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, y^T x = 4+16+64+256 = 340, c = \frac{-1}{341}$$

$$\therefore \text{逆矩阵为: } I_n - \frac{1}{341} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 16 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \\ 32 & 64 & 128 & 256 \end{bmatrix}$$

13) 不可逆. 理由如下:

$$y^T x = -1 \therefore 1 + y^T x = 0$$

$$I_n + cxy^T = I_n - \frac{1}{1+y^T x} xy^T$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 & x_1 y_4 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 & x_2 y_4 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 & x_3 y_4 \\ x_4 y_1 & x_4 y_2 & x_4 y_3 & x_4 y_4 \end{bmatrix}$$

系数使之成立 $\therefore r(I_n + xy^T) < n$ 不可逆

五. (本题 12 分, 每小题 6 分) (1) 证明: 分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

的秩大于等于 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

(2) 举例说明有可能 $\text{rank}(M) > \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

证: 存在 P, Q, P_1, Q_1 满足 $P, A, Q_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_1 B Q_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{考虑 } \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ 0 & P_1 B Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & C_{12} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & & & \\ & C_{12} & & \\ & & I_n & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{rank}(M) = \text{rank}(A) + \text{rank}(C_{12}) + \text{rank}(B).$$

$$\geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

(12)

证: 若 $\text{rank}(C_{12}) > 0$

$$\text{eg } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(M) = 3, \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$$

六. (本题 12 分, 每小题 6 分) 考虑次数不超过 3 的实系数多项式构成的线性空间 $P_3[x]$, 它有一组基为

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3.$$

(1) 证明:

$$f_1 = 1, f_2 = x-1, f_3 = (x-1)^2, f_4 = (x-1)^3$$

也是 $P_3[x]$ 的一组基. 并计算从基 $e_1, \dots, e_4$ 到 $f_1, \dots, f_4$ 的过渡矩阵 A .

(2) 定义 $P_3[x]$ 上的线性变换

$$T: f(x) \mapsto f(x-2).$$

求 T 在基 $e_1, \dots, e_4$ 下的表示矩阵 B . 矩阵 A 和矩阵 B 有什么关系?

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore f_1, f_2, f_3, f_4$ 线性无关 $\forall p \in P_3[x]$ 能被线性表出

$\therefore$ 是 $P_3[x]$ 的一组基.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} A, \quad \therefore \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4.$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} B.$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix}$$

(12)

$$\text{由题可得 } T(e_1) = 1, T(e_2) = x-2, T(e_3) = (x-2)^2, T(e_4) = (x-2)^3.$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{关系: } A^2 = B.$$

七. (本题 16 分, 第一小题 4 分, 后两小题每题 6 分) 用 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 表示实数域上 2×2 全体构成的线性空间. 定义

$$(A, B) = \text{tr}(A^T B).$$

- (1) 证明 (A, B) 定义了 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的内积.
- (2) 证明所有形如

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

的矩阵构成 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一个子空间, 并求出它在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上关于以上内积的正交补空间.

- (3) 利用 Schmidt 正交化方法, 求矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

张成的 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间的一组标准正交基.

(1) 内积性质: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$ ✓
 $\langle kA, B \rangle = \text{tr}(kA^T B) = k \text{tr}(A^T B) = k \langle A, B \rangle$ ✓
 $\langle A+B, C \rangle = \text{tr}((A+B)^T C) = \text{tr}(A^T C) + \text{tr}(B^T C) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) \geq 0$$

当且仅当 A 为零矩阵时取等

(13)

∴ $\langle A, B \rangle$ 定义了 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的内积

(2) 设 $P_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$
 $P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{bmatrix}$ 仍在该空间中

且 $\begin{bmatrix} k a_1 & k b_1 \\ -k b_1 & k a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k a_1 & k b_1 \\ -(k b_1) & k a_1 \end{bmatrix}$ 仍在该空间中

要证 $\langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow \text{tr}(A^T B) = 0$
 $A^T B$ 对角线元素之和为 0

$$A \cap B = \{0\}$$

正交

$$(3) \quad d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_3 = \frac{d_2 - d_1 d_1^T d_2}{\|d_2 - d_1 d_1^T d_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_4 = \frac{d_3 - d_1 d_1^T d_3 - d_2 d_2^T d_3}{\|d_3 - d_1 d_1^T d_3 - d_2 d_2^T d_3\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_5 = \frac{d_4 - d_1 d_1^T d_4 - d_2 d_2^T d_4 - d_3 d_3^T d_4}{\|d_4 - d_1 d_1^T d_4 - d_2 d_2^T d_4 - d_3 d_3^T d_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

八. (本题 12 分, 每小题 6 分) 设 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵, x 表示 n 维列向量.

- (1) 证明 A 可逆当且仅当齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.
- (2) 设 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, 假设对每个 i , 都有

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i, i-1}| + |a_{i, i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

证明 A 可逆.

(1) A 可逆 $\Rightarrow r(A) = n$ 对 $Ax = 0$ A 的列向量线性无关. $\Rightarrow Ax = 0$ 只有零解.

$Ax = 0$ 只有零解 $\Rightarrow A$ 的列向量线性无关, $\text{rank}(A) = n$, 故 A 可逆.

(2) 要证 A 可逆.

可证 $r(A) = n$

即证 $Ax = 0$ 只有零解 (由 (1) 得)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{in}|$$

$$\therefore |a_{ii}| + \dots + |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

∴ 进行初等行变换时.

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{in}|$$

$$\text{而 } \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| > 0.$$

$$\therefore |a_{ii}| \text{ 行变换 } |b_{ii}| > 0.$$

∴ 主元列必有 n 列 $\Rightarrow Ax = 0$ 只有零解

七. (本题 16 分, 第一小题 4 分, 后两小题每题 6 分) 用 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 表示实数域上 2×2 全体构成的线性空间. 定义

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

- (1) 证明 $\langle A, B \rangle$ 定义了 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的内积.
(2) 证明所有形如

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

的矩阵构成 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一个子空间, 并求出它在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上关于以上内积的正交补空间.

(3) 利用 Schmidt 正交化方法, 求矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

张成的 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间的一组标准正交基. 不妨设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$(1) \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$$

$$\textcircled{1} \langle B, A \rangle = \text{tr}(B^T A) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} a_{ij} = \langle A, B \rangle$$

$$\textcircled{2} \langle kA, B \rangle = \text{tr}(kA^T B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k a_{ij} b_{ij} = k \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ij} = k \langle A, B \rangle$$

$$\textcircled{3} \langle A+B, C \rangle = \text{tr}((A+B)^T C) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_{ij} + b_{ij}) c_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} c_{ij} = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

$$\textcircled{4} \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^2 \geq 0 \quad \text{当且仅当} \quad a_{ij} = 0 \quad A = 0 \text{ 取等}$$

$\therefore$ 定义了内积

$$\textcircled{a} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

其中 $a = a_1 + a_2 \in \mathbb{R}, b = b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$

$$k \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ -kb_1 & ka_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{其中} \quad a = ka_1 \in \mathbb{R}, b = kb_1 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ 构成了子空间

正交补空间 $\begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ $\forall \alpha \in W_1, \beta \in W_2, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$
(划错了, 忽略) A_1, A_2, A_3, A_4 满足 $W_1 \perp W_2$ $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A_1, A_2, A_3, A_4$ 是 $\text{span}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 的基

$$q_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{A_2 - q_1 q_1^T A_2}{\|A_2 - q_1 q_1^T A_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{A_3 - q_1 q_1^T A_3 - q_2 q_2^T A_3}{\|A_3 - q_1 q_1^T A_3 - q_2 q_2^T A_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \frac{A_4 - q_1 q_1^T A_4 - q_2 q_2^T A_4 - q_3 q_3^T A_4}{\|A_4 - q_1 q_1^T A_4 - q_2 q_2^T A_4 - q_3 q_3^T A_4\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore q_1, q_2, q_3, q_4$ 即为标准正交基

八. (本题 12 分, 量)

- (1) 证明 A 可逆
(2) 设 $A = (a_{ij})$

证明 A 可逆

(1) A 可逆

$\therefore$ 充

(2) 考虑

$\Rightarrow a_{ij}$

若有非零

对 A 每

$A \rightarrow$

$\therefore \text{ran}$

$\Rightarrow$

1. A 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解

(1) 设 $A = (a_{ij})$

若对每个 i , $|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|$

则 A 可逆

只需证 $Ax=0$ 只有零解

用反证法, 若 $x \neq 0$ 满足 $Ax=0$

即 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0, 1 \leq i \leq n$

$x \neq 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ 不全为 0

设 $|x_i| = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$\Rightarrow a_{i1}x_1 = -a_{i2}x_2 - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \dots - a_{in}x_n$

$\Rightarrow |a_{ii}| \leq |a_{i1}| \frac{|x_1|}{|x_i|} + |a_{i,i-1}| \frac{|x_{i-1}|}{|x_i|} + |a_{i,i+1}| \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} + \dots + |a_{in}| \frac{|x_n|}{|x_i|}$ 矛盾!

$$\begin{pmatrix} Te_1 & Te_2 & Te_3 & Te_4 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T: f(x) \mapsto f(x-2)$$

$$S: f(x) \mapsto f(x-1)$$

$$T = S \circ S \quad Se_j = f_j \Rightarrow S \text{ 的矩阵记为 } A \Rightarrow B = A^2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schmidt 正交化

$$Q_1 = \frac{A_1}{|A_1|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{由 } (A_1^T A_1)$$

$$Q_2 = \frac{A_2 - \langle A_2, Q_1 \rangle Q_1}{|A_2 - \langle A_2, Q_1 \rangle Q_1|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \frac{A_3 - \langle A_3, Q_1 \rangle Q_1 - \langle A_3, Q_2 \rangle Q_2}{|A_3 - \langle A_3, Q_1 \rangle Q_1 - \langle A_3, Q_2 \rangle Q_2|}$$